数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 83-90

Coxeter 群のある種の分解の構成

中村得之 (Tokushi Nakamura)

1. 群 W とその部分集合 S が次の条件を満たしているとする。$1 \notin S$, またすべての $s \in S$ に対し $s^2 = 1$ が成り立つ。更に S が W を生成するものとする。

定義 対 (W, S) が次の条件 (Coxeter の条件) を満たすとき, (W, S) を Coxeter 対, W を Coxeter 群とよぶ

i) S と一対一対応する集合 $\hat{S} = \{ \hat{s} \mid s \in S \}$ が存在する。

ii) 自然数又は $+\infty$ に値をもつ, $\hat{S}$ 行 $\hat{S}$ 列の行列 $M = \{ m(\hat{s}, \hat{s}') \mid \hat{s}, \hat{s}' \in \hat{S} \}$ が存在し, 次の条件を満たす。

ii-1) $\hat{S}$ に属するすべての $\hat{s}$ に対し, $m(\hat{s}, \hat{s}) = 1$ が成り立つ。

ii-2) $\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対し, $m(\hat{s}, \hat{s}') = m(\hat{s}', \hat{s}) \geq 2$ が成り立つ。

iii) $\hat{W}$ を $\hat{S}$ を自由生成元の集合とする自由群とし, N を $\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対して定まる $\hat{W}$ の元 $(\hat{s}\hat{s}')^{m(\hat{s}, \hat{s}')}$ で生成される正規部分群とする。このとき S に属する任意の s に対し, $\hat{s}$ を s に移す写像 π は

同型 $\hat{W}/N \twoheadrightarrow W$ を導き起こす。

以下，Sに属するすべてのsに対し，$\hat{s}$とsを同一視する。

Sと一対一対応する集合 $e_S = \{e_s \mid s \in S\}$ を基底とするR上の線型空間をVとする。Mの定めるV上の双一次形式Bを，Sに属する任意のs, s'に対し $B(e_s, e_{s'}) = -\cos(\pi/m(s,s'))$ で定める。このときWのV上への表現σをWに属する任意のwに対し $\sigma(w) = \sigma_w$ と書くとき，σ_sはVに属する任意の元xに対し $\sigma_s(x) = x - 2B(x, e_s)e_s$ を満すものとして定義する。

σはBを不変に保つWの忠実な表現となる。

そこで $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ とする。WのV^*上への表現σ^*を，Wに属する任意のwに対し $\sigma^*(w) = \sigma^*_w$ と書くとき，σ^*_wはVに属する任意のx，V^*に属する任意のx^*に対し $<\sigma^*_w(x^*), \sigma_w(x)> = <x^*, x>$ が成り立つものとして定義する。σ^*もWの忠実な表現である。

gを自然数とする。R^gに属するベクトル$\mathbf{x}$をとるとき，$1 \leq j \leq g$ を満たす任意の自然数jに対し実数x^jが定まり

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \end{pmatrix}$$

と表される。R^gには辞書式順序により$<$を定める。

ここで$(V^*)^g$を考える。$(V^*)^g$に属する元Xをとる。$1 \leq j \leq g$ を満たす任意の自然数jに対し，V^*に属する元x^{*j}

が定まり

$$X = \begin{pmatrix} x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*g} \end{pmatrix}$$

と表される. Sに属する任意のsに対し

$$\langle X, e_s \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^{*1}, e_s \rangle \\ \vdots \\ \langle x^{*g}, e_s \rangle \end{pmatrix}$$

とおく。即ち $1 \leq j \leq g$ を満たす任意の自然数に対し,

$$\langle X, e_s \rangle^j = \langle x^{*j}, e_s \rangle$$

と定める。

補題 V^*に属する任意のX, Sに属する任意のsに対し, $\langle X, e_s \rangle = 0 \in R^g$ になることと, $sX = X$となることとは同値である.

定義 V^*の部分集合Cを次のように定義する.

$$C = \{ X \in (V^*)^g \mid {}^\forall s \in S \quad \langle X, e_s \rangle \geqq 0 \}$$

命題 Cに属する点X, Y, Wに属するwが与えられていたとする。この時, $Y = wX$が成り立つためには, 次の二条件が成り立つことが必要十分である.

i) $X = Y$

ii) 自然数rと語$(s_1, \cdots, s_r) \in S^r$が存在し, $1 \leq i \leq r$を満たすすべての自然数iに対し$s_i X = X$が成り立ち、かつ$w = s_1 \cdots s_r$となる.

写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,g]$ が与えられたとする。このとき写像 $\hat{\rho}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,g]$ を，S に属するすべての $\hat{s}$ に対し $\hat{\rho}(s) = g - \hat{\alpha}(s)$ が成り立つものとして定義する.

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,g]$ に対し，$(V^*)^g$ の部分集合 $C(\hat{\alpha})$ を次のように定義する.

$$C(\hat{\alpha}) = \{ X \in (V^*)^g \mid \forall s \in S\ \forall j \in N \cap [1,g]\ \langle X, e_s^j \rangle = 0\ \ \hat{\rho}(s)+1 \leq g \Rightarrow \langle X, e_s^{\hat{\rho}(s)+1} \rangle > 0 \}$$

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,g]$ に対し，$|\hat{\alpha}|, |\hat{\rho}| \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ を次のようにして定義する

$$|\hat{\alpha}| = \{ \sum \hat{\alpha}(s) \mid s \in S \}, \quad |\hat{\rho}| = \{ \sum \hat{\rho}(s) \mid s \in S \}.$$

w を W の元とするとき，w の長さ $l(w)$ を

$$l(w) = \min \{ r \in \mathbb{Z}_+ \mid (s_1, \cdots, s_r) \in S^r\ \ w = s_1 \cdots s_r \}$$

で定義する.

S' を S の部分集合とする. このとき S' で生成される W の部分群を $W_{S'}$ で表す. ここで，$S \cap W_{S'} = S'$ が成り立つ. さらに，$W^{S'} = \{ w \in W \mid \forall s' \in S'\ \ l(ws') > l(w) \}$ とおく。自然な写像が，全単射 $W^{S'} \twoheadrightarrow W/W_{S'}$ を与えることが知られている.

命題　$\hat{\alpha}: \hat{S} \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,g]$ が与えられたとする. このとき，$C(\hat{\alpha})$ は $(V^*)^g$ の 0 を頂点とする半線型錐体となる。また $\dim C(\hat{\alpha}) = |\hat{\alpha}|$，従って $\operatorname{codim} C(\hat{\alpha}) = |\hat{\rho}|$ となる。また，$C(\hat{\alpha})$ に属するすべての点 X に対し，その固定部分群

W_x は，$W_{\hat{\alpha}(0)}$ に等しい．

さらに，これらの集合の族

$$C = \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g] \}$$

は，c の胞体分割

$$c = \coprod \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g] \}$$

を与える

また，上の胞体の中余次元有限となるものの全体からなる族を C_f，これに属する胞体全体の合併を c_f とする．また，c_f に属するすべての点 X の W 軌道 WX の合併を U_f で表す．即

$$U_f = \coprod \{ w_{\hat{\alpha}} c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g], |\hat{P}| < +\infty, w_{\hat{\alpha}} \in W^{\hat{\alpha}(0)} \}$$

である．

命題　U_f に属する任意の二点を結ぶ線分はまた U_f に含まれる。したがって，U_f は可縮である

以下，写像 $\hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ はすべて条件 $|\hat{P}| < +\infty$ を満すものとする。

定義　写像 $\hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする．

i)　S に属する s が条件 $\hat{P}(s) = g-1$ を満たしているとする．

　このとき，$(V^*)^g$ の部分集合 $\partial_s c(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$$\partial_s c(\hat{\alpha})$$

$$= \{ X \in (V^{*g}) \mid$$

$$\mid \forall t \in S \ \ t \neq s \ \ \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{P}(t)] \ \ \langle X, e_t^j \rangle = 0 \ \ \hat{P}(t)+1 \le g \to \langle X, e_t^{\hat{P}(t)+1} \rangle > 0$$

$| \; t = s \qquad \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{\rho}(s)+1] \; \langle X, e_s^j \rangle = 0 \qquad \}$

ii) S に属する s が条件 $\hat{\rho}(s) \leq g-2$ を満たすものとする

このとき $(V^*)^g$ の部分集合 $\partial_s^{\pm} c(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$\partial_s^{\pm} c(\hat{\alpha})$

$= \{ X \in (V^*)^g$

$| \; \forall t \in S \quad t \neq s \quad \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{\rho}(t)] \; \langle X, e_t^j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(t)+1 \leq g \to \langle X, e_t^{\hat{\rho}(t)+1} \rangle > 0$

$t = s \qquad \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{\rho}(s)+1] \; \langle X, e_s^j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(s)+2 \leq g \wedge \langle X, e_s^{\hat{\rho}(s)+2} \rangle \gtrless 0 \}$

定義　Coxeter対 (W, S) が与えられたとき，これから定まるCoxeter図式 Γ とは，次の条件を満たす1次元単体的複体をいう。

0) $\Gamma_0 = S$

1) $\Gamma_1 = \{ \{s, s'\} \subset S \mid s \neq s' \quad 3 \leq m(s, s') \}$

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。このとき，$\hat{\alpha}$ によって定義されるフィルター $\{ {}^{\alpha}S \mid \alpha \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, g] \}$ を次のように定める

$${}^{\alpha}S = \{ t \in S \mid \alpha \leq \hat{\alpha}(t) \}$$

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。S に属する s に対し，$\alpha = \hat{\alpha}(s)$ とおく。このとき，$\Gamma \setminus {}^{\alpha}S \cup \{s\}$ の s を含む連結成分を ${}_{\alpha}\Gamma_s$，$S \cap {}_{\alpha}\Gamma_s$ を ${}_{\alpha}S_s$ と書く。

定理　$\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。

W に属する u と写像 $\hat{\beta}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ をとる。これらが

i) $\operatorname{codim}\left(\overline{C}(\hat{\alpha}) \cap u\,C(\hat{\beta}),\ \overline{C}(\hat{\alpha})\right) \geqq 2$

ii) $u \in W^{\hat{\beta}^{-1}(0)}$

を満たすためには，Sに属するsが存在し，sが以下の条件

i_s), ii_s^{+}), ii_s^{-}) の何れかを満たすことが必要十分である。

i_s) $\hat{\rho}(s) = g-1$

i_s-1) $u = 1$

i_s-2)
$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq s \\ \hat{\alpha}(s)-1 & t = s \end{cases}$$

i_s-3) $u\,C(\hat{\beta}) = \partial_s C(\hat{\alpha})$

ii_s^{+}) $\hat{\rho}(s) \leqq g-2$

ii_s^{+}-1) $u = 1$

ii_s^{+}-2)
$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq s \\ \hat{\alpha}(s)-1 & t = s \end{cases}$$

ii_s^{+}-3) $u\,C(\hat{\beta}) = \partial_s^{+} C(\hat{\alpha})$

ii_s^{-}) $\hat{\rho}(s) \leqq g-2$

ii_s^{-}-1-1) $u \in W_{{}_{\hat{\alpha}(s)}S_s} \cap W^{S\setminus\{s\}}$

ii_s^{-}-1-2) $\operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \cap {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \subset S$

ii_s^{-}-2)
$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \in S \setminus {}_{\alpha(s)}S_s \\ \hat{\alpha}(s)-1 & t \in {}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \cap {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \\ \hat{\alpha}(\operatorname{ad} u(t)) & t \in \operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \cap {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \end{cases}$$

ii-3) $\operatorname{codim}\left(\partial_s^- C(\hat{\alpha}) \setminus \right.$

$$\left. \bigsqcup \{ u C(\hat{\beta}) \mid u \in W \quad \hat{\beta} \cdot S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,\ 8]\ \text{ii-1-1)}\ \text{ii-1-2)}\ \text{ii-2)} \} \right)$$

≤ 1

以下は、有限鏡映群の場合と同じ論法[1]を用いればよい。

文献

[1] 中村得之 有限鏡映群のある種の分解の構成
数理解析研究所講究録 1057 (1998) 56〜66